

12 Μαΐου 2017 Καλή Επιτυχία

Πρόοδος στο μάθημα Ειδικά Θέματα Γεωμετρίας (822)

(Ο τρισδιάστατος Χώρος θεωρείται εφοδιασμένος με το κανονικό του εσωτερικό γινόμενο)

Θέμα 1° (4 μονάδες)

Θεωρούμε την ευθεία L του χώρου που παράγεται από το διάνυσμα $u=(1,-1,1)$.

Θεωρούμε ακόμα το σημείο $P=(0,1,2)$ του χώρου.

α) Να δειχθεί ότι το P δεν ανήκει στην L . (1 μονάδα)

β) Έστω Π να είναι το μοναδικό επίπεδο του χώρου που περιέχει τα P και L .

Να ευρεθούν δυο διανύσματα a, b του χώρου που να ικανοποιούν τα εξής:

Τα a, b ανήκουν στο Π , $a+b=P$, $\langle a, b \rangle = 0$, το a ανήκει στην L . (2 μονάδες)

γ) Να υπολογιστεί η απόσταση του P από την L . (1 μονάδα)

Θέμα 2° (3 μονάδες)

α) Θεωρούμε το σύνολο $A = \{ (1+4\lambda, 2+5\lambda, 3+6\lambda) \mid \lambda \text{ ανήκει στο } \mathbb{R} \}$.

Δείξτε ότι το A είναι μια ευθεία του χώρου που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να την γράψετε στην διανυσματική μορφή $t_a(L)$ για κατάλληλο διάνυσμα a και κατάλληλη ευθεία L που διέρχεται από το $(0,0,0)$. (1 μονάδα)

β) Θεωρούμε έναν τυχαίο διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο (V, \langle, \rangle) .

Έστω a, b να είναι δυο διανύσματα του V τέτοια ώστε: $\|a\| = 2$, $\|b\| = 3$, $\langle a, b \rangle = 4$.

Δείξτε ότι τα a, b είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\langle 2a+3b, -3a+4b \rangle$. (2 μονάδες)

Θέμα 3° (3 μονάδες)

α) Δώστε ένα παράδειγμα τριών μη μηδενικών διανυσμάτων του χώρου που το κάθε ένα να είναι κάθετο με τα άλλα δύο. (1 μονάδα)

β) Να αποδείξετε ότι τρία μη μηδενικά και κάθετα ανα δύο διανύσματα του χώρου είναι γραμμικά ανεξάρτητα. (1 μονάδα)

γ) Θεωρούμε τρία διανύσματα a, b, c του χώρου που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

Αν $\langle a, b \rangle = \langle a, c \rangle = 0$ να δείξετε ότι τα b και c είναι γραμμικά εξαρτημένα. (1 μονάδα)

(Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για το τρίτο Θέμα).